

Gruppenübung zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2015

Universität Paderborn
Fakultät EIM, Mathematik
M. Witte
J. Schütt

Blatt 1

Gruppenübung 1. (*Ideale*)

Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ eine additive Untergruppe.

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a}$ genau dann ein Links-Ideal ist, wenn für alle $r \in R$ und $a \in \mathfrak{a}$ gilt $ra \in \mathfrak{a}$. Finden Sie eine äquivalente Bedingung für Rechts- bzw. zweiseitige Ideale.
- (b) Sei jetzt $\mathfrak{a}$ ein zweiseitiges Ideal. Zeigen Sie, dass die Faktorgruppe $R/\mathfrak{a}$ ein Ring ist.
- (c) Wir setzen $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $\mathfrak{a} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a}$ ein zweiseitiges Ideal ist und bestimmen Sie $R/\mathfrak{a}$. Was sind die Ideale von $R/\mathfrak{a}$?

Gruppenübung 2. (*Bild und Urbild*)

Seien R, R' Ringe und M, N R -Linksmoduln.

- (a) Sei $\phi: M \rightarrow N$ ein Modulmorphismus. Machen Sie sich klar, dass für jeden Untermodul $M' \subseteq M$ bzw. $N' \subseteq N$ das Bild $\phi(M') \subseteq N$ bzw. das Urbild $\phi^{-1}(N') \subseteq M$ ebenfalls ein Untermodul ist.
- (b) Sei $\varphi: R \rightarrow R'$ ein Ringmorphismus und $\mathfrak{a}' \subseteq R'$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass $\varphi^{-1}(\mathfrak{a}')$ ein Ideal ist.
- (c) Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass in der Situation von (b) $\varphi(\mathfrak{a})$ im Allgemeinen *kein* Ideal von R' ist.

Gruppenübung 3. (*Nicht endlich erzeugte Untermoduln*)

Sei $R = \mathbb{Q}[t_n; n \in \mathbb{N}]$ der Polynomring in unendlich vielen Variablen. Zeigen Sie

- (a) R ist als R -Modul endlich erzeugt und
- (b) der von $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erzeugte Untermodul ist nicht endlich erzeugt.